Les Cahiers de la S.R.D.

10

NAVIGATION ASTRONOMIQUE

1 Rudiments de trigonométrie

Avertissement

Ces cahiers ont pour vocation de synthétiser les connaissances relatives à chacun des thèmes abordés. Ils sont le fruit de la mutualisation des expériences communes des auteurs en matière de navigation.

Ils ne nécessitent pas de pré-requis scientifiques pour leur compréhension. Mais ils essaient néanmoins de ne pas céder à la facilité de la simplification abusive qui fausserait l'intention initiale : celle de faire comprendre les interactions complexes qui régissent le fonctionnement d'un voilier.

Malgré toute l'attention qui a été portée à la rédaction de ces pages, certaines erreurs ou imprécisions peuvent subsister. Les auteurs s'en excusent et remercient le lecteur pour son indulgence. Ils le remercient également de leur faire part de ses remarques et suggestions.

Bonne lecture et surtout bonnes navigations,

Les auteurs

NAVIGATION ASTRONOMIQUE
RUDIMENTS DE TRIGONOMÉTRIE

Aujourd'hui avons nous encore besoin de savoir maitriser la navigation astronomique et le maniement du sextant ? Franchement non avec le GPS présent à bord de nos bateaux qui nous donne par tout temps de jour comme de nuit notre position exacte à quelques dizaines de mètres près. Pas de calcul nécessaire, un affichage sur la carte numérique de sa position, voilà quelque chose de bien pratique.

On peut toujours opposer l'argument : « oui, mais s'il tombe en panne, s'il n'y a plus d'électricité à bord ? » . Effectivement, mais y a t-il un seul GPS à bord ? En général non, entre celui du traceur, celui de l'ordinateur ou de la tablette, celui du téléphone du skipper, ceux des équipiers on ne risque pas de perdre sa positon !

Alors à quoi bon savoir utiliser le sextant pour relever la hauteur d'un astre, quand il est visible, sur le pont d'un bateau mouvant, quand l'horizon n'est pas bouché, pour ensuite se plonger dans des tables de chiffres et se débattre avec des formules de trigonométrie bien rébarbatives ? Au bout d'un bon quart d'heure d'acrobaties intellectuelles, on sait qu'il faudra recommencer une deuxième fois dans quelques heures pour espérer obtenir sa position sur la carte papier ! Sans parler de l'agrément de ce travail sur la table à cartes d'un voilier qui n'est pas des plus stables.

Comme personne n'est masochiste sur un voilier, quelques arguments de bonne foi à utiliser pour se justifier de se lancer dans l'aventure :

- Redécouvrir la science des navigateurs d'autrefois qui vous ont fait rêver : les capitaines Cook, Surcouf, Bligh, Bougainville, plus près de nous Slocum, Moitessier, Dumas….et bien d'autres !
- C'est enrichissant et agréable de découvrir une science par la pratique, science qui s'est construite et a été utilisée depuis des siècles.
- Et ultime argument massue : « Et si tous les GPS du bord tombent en panne ? »

Note aux courageux lecteurs :

Le sujet de la Navigation Astronomique est vaste et fait appel à de nombreuses notions. Aussi il fait l'objet d trois cahiers qu'il convient d'étudier dans l'ordre proposé.

Le premier cahier rassemble les notions de trigonométrie nécessaires. Il peut ne pas être abordé si les notions qui y sont présentées sont familières, néanmoins sa lecture est conseillée pour assoir les bases mathématiques.

Le deuxième cahier est consacré à la présentation des bases de la mécanique céleste.

Le troisième permet d'aborder les techniques de localisation à l'aide des connaissances acquises dans les deux premiers cahiers.

Bonne lecture……

1 TERRIFIANTS RAPPELS MATHÉMATIQUES

Les notions qui vont être abordées dans ce chapitre sont nécessaires pour aborder la problématique de la navigation astronomique. Il n'y aura pas de démonstrations mathématiques rigoureuses de faites mais simplement des présentations des résultats utiles à la compréhension et à la pratique de ces techniques.

1.1 LES ANGLES ET LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1.1.1 Définition et mesure

L'angle est défini comme l'ouverture entre deux demi-droite de même origine. Ici l'angle, noté θ (theta), est l'angle entre les demi-droites (O,X) et (O,Y). *Figure 1*

Plusieurs unités peuvent être utilisées et parmi celles-ci on retiendra le degré (°) et le radian (rad).

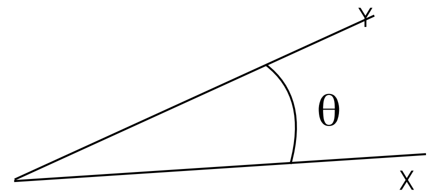


Figure 1

On se souviendra qu'un angle « plat » ou les deux demi-droites sont dans le prolongement l'une de l'autre prend la valeur de 180 ° ou de π (pi) radians. *Figure 2*

180° = π rad.

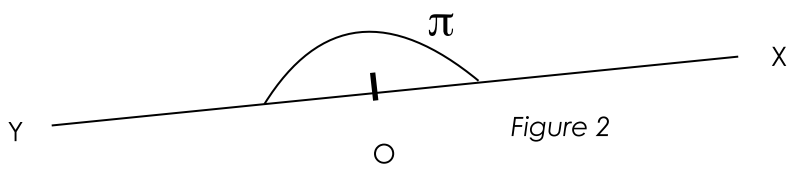


Figure 2

Sous-multiples

Pour un angle exprimé en **radian**, on utilise une notation décimale pour exprimer les sous multiples. Par exemple un angle sera donné par 28,92 rad.

Pour un angle exprimé en **degré**, plusieurs solutions existent :

Avec l'avènement des systèmes de calcul modernes les angles sont maintenant souvent exprimés sous forme **décimale** : 40,87 °.

La mesure d'une angle en degré est traditionnellement exprimée sous forme **sexagésimale**. Le degré a été divisé en 60 parties égales appelées minutes. Chaque minute est divisée en 60 parties égales nommées seconde. Pour ne pas confondre ces minutes et secondes d'angle avec leurs homologues utilisées dans la mesure du temps elles sont notées respectivement par le symbole' pour la minute par le symbole'' pour la seconde. On notera ainsi : 40° 08'35'' qui se lit « 40 degrés 8 minutes 35 secondes ».

Quelques acrobaties dans ces systèmes de mesure des angles

Convertir un angle exprimé en radians en un angle exprimé en degrés :

β = 1,23 rad quelle est sa valeur en degrés ?

Il faut se souvenir que :180° = π rad, donc 1 rad = 180° /π. Alors β = 1,23 x180° /π, soit

β = 1,23 x180°/3,1416…= 70,47 ° **$\boldsymbol{\beta}$ = 70,47** °

Exprimons maintenant cet angle sous forme sexagésimale :

70,47 ° = **70**°+0,47°

Sachant que 1°=60', 0,47°= 0,47x60' = 28,2' 28,2'=**28'**+0,2'

Sachant que 1'=60'', 0,2'= 0,2*60'' = **12**''

Au final : **$\boldsymbol{\beta}$ = 70,47° = 70°28'12''**

Conversion d'un angle sous forme sexagésimale en un angle sous forme décimale :

δ = 58° 46' 55'' exprimons le sous forme décimale:

1''=1/60 ', d'où 55''= 55/60'= 0,9166..'

δ = 58° (46+0,9166)' = 58°46,9166'

1'=1/60°, d'où 46,9166'=46,9166/60 =0,7819°

Au final : **δ = 58° 46' 55'' = 58,7819** °

Sommation de deux angles

Sous forme décimale l'opération ne pose aucun problème que l'angle soit exprimé en degré ou en radian.

La somme de eux angles exprimés en degrés sexagésimaux est un peu plus délicate:

Exemple 1

Θ= 8°10'12'' λ =25° 48' 55'' Θ+ λ = (8°10'12 '')+(25° 48' 55'')

Additionnons les secondes : 12''+55'' = 67'' , soit **1'7''**

Additionnons les minutes : 10'+48' = **58'**

Additionnons les degrés : 8°+25° =**33**°

D'où = Θ+ λ = 33° (58+1)'7'' = **33°59'7''**

Exemple 2

Θ= 186°58'42'' λ =215° 49' 04'' Θ+ λ = (186°58'42'')+(215° 49' 04'')

Somme des secondes : 42''+4''= **46''**

Somme des minutes : 58'+49' = 107', soit : **1°47'**

Somme des degrés : 186+215 = **401**°

Θ+ λ = 402°47'46''

On voit que cet angle est plus grand qu'un tour (360°), on pourra l'exprimer de façon plus simple en retirant le nombre de tours « superflus » (ici un). On obtient alors :

Θ+ λ = 42°47'46''

Cette éradication du nombre de tours excédentaires ne change pas l'exploitation de cet angle dans les calculs de trigonométrie.

1.1.2 Angles du marin et du mathématicien

Le marin compte ses angles en plaçant les quatre points cardinaux sur un cercle, en haut le **NORD**, à l'opposé le **SUD**, donc à 180° du nord. A droite de l'axe NORD-SUD on place **l'EST**, donc à 90 ° du nord et à son opposé **l'OUEST**, donc à 270 ° du nord.

On définit ainsi un sens d'évolution positif des angles correspondant au sens horaire (sens de rotation des aiguilles d'une montre). Figure 3

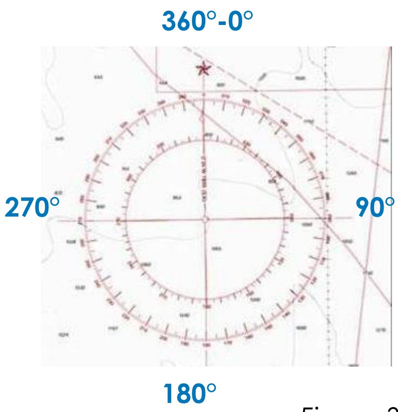


Figure 3

Le mathématicien pour plein de bonnes raisons que nous ne développerons pas ici, a choisi d'utiliser une autre convention pour compter ses angles positivement. Le sens positif de comptage est le sens anti-horaire (sens inverse des aiguilles d'une montre) *Figure 4*

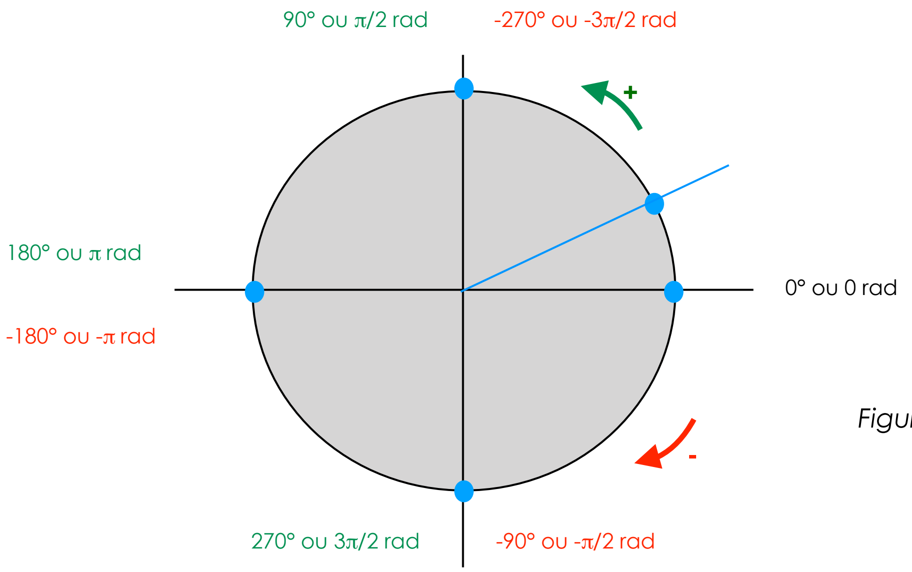


Figure 4

1.2 TRIGONOMÉTRIE UTILE POUR LE NAVIGATEUR : SINUS, COSINUS, TANGENTE

Prenons un cercle de centre O et de rayon R et traçons une demi-droite issue de O. Elle coupe le cercle en A. Entre (O, x) et cette demi-droite on définit un angle β. *Figure 5*

On projette A sur (O,x) et (O, y) et on obtient les points B et C. Sur cette figure on constate que OC = AB, AC=OB et OA = R.

On y définit trois rapports, OB/OA, OC/OA et AB/OB. On constate que si l'angle β évolue ces rapports évoluent aussi et on définit ainsi trois fonctions pour l'angle β: cos (β) (cosinus de β), sin (β) (sinus de β) et tan (β) (tangente de β). Avec

cos (β)= OB/OA,

sin (β)= OC/OA

tan (β)= AB/OB

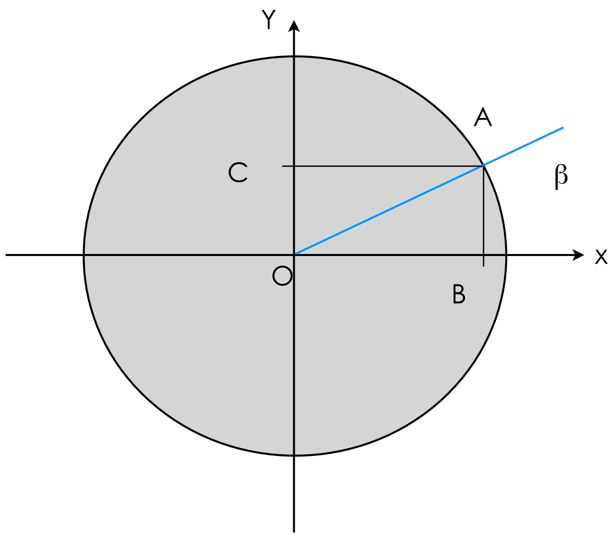


Figure 5

Remarques :

- On constate que ces rapports de longueurs sont indépendants du diamètre du cercle.
- Ces trois fonctions angulaires sont très utilisées dans les calculs de navigation astronomique.
- On vérifie que : tan(β)=sin(β)/cos(β)

1.3 UN PRÉCIEUX ÉQUIPIER : LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Reprenons la même figure avec un cercle de rayon 1, OA = 1. Nous avons donc : OB = cos(β), OC = sin(β). *Figure 6*

Le cosinus de l'angle est donc mesuré sur l'axe des x et son sinus sur l'axe des y.

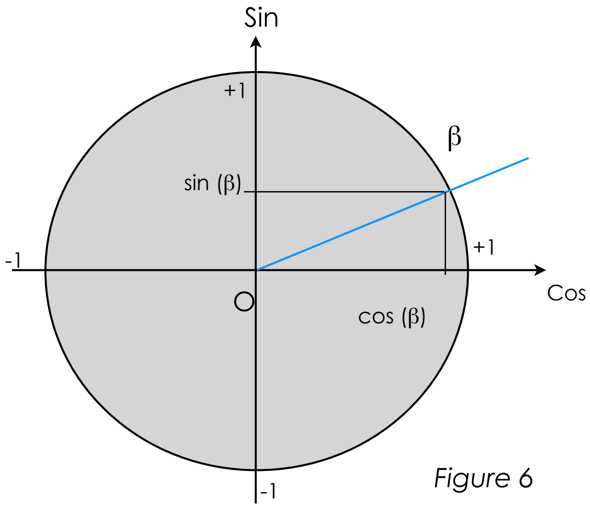


Figure 6

Et on constate en premier et c'est une caractéristique importante dont il faut se souvenir, que :

Le cosinus comme le sinus ont des valeurs comprises entre -1 et +1, elles ne peuvent les excéder !

Ce cercle trigonométrique est riche de renseignements, car on peut trouver (et retrouver facilement)des valeurs caractéristiques et des relations entres les fonctions trigonométriques des angles β, -β, π/2-β, π/2+β, π-β, π+β. *Figure 7*

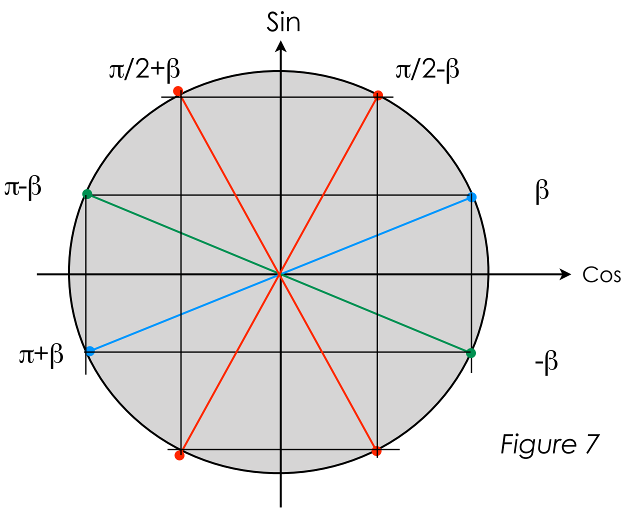


Figure 7

$\cos(0) = 1 \quad \sin(0) = 0$

$\cos(\pi/2) = 0 \quad \sin(\pi/2) = 1$

$\cos(\pi) = -1 \quad \sin(\pi) = 0$

$\cos(-\pi/2) = 0 \quad \sin(-\pi/2) = -1$

$\cos(\beta) = \cos(\beta)$

$\sin(\beta) = \sin(\beta)$

$\cos(\pi/2-\beta) = \sin(\beta)$

$\sin(\pi/2-\beta) = \cos(\beta)$

$\cos(\pi/2+\beta) = -\sin(\beta)$

$\sin(\pi/2+\beta) = \cos(\beta)$

$\cos(\pi+\beta) = -\cos(\beta)$

$\sin(\pi+\beta) = -\sin(\beta)$

$\cos(\pi-\beta) = -\cos(\beta)$

$\sin(\pi-\beta) = \sin(\beta)$

1.4 LA SPHÈRE

1.4.1 Sa définition

Une sphère est l'ensemble des points de l'espace restants à égale distance d'un point O. Ce point O est le **centre** de la sphère et la distance s'appelle le **rayon** de la sphère. *Figure 8*

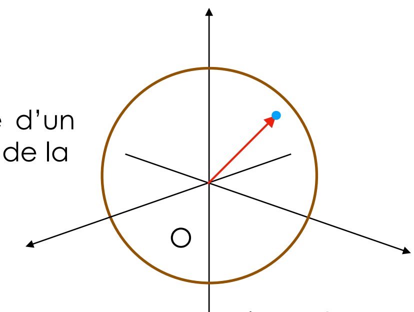


Figure 8

1.4.2 Sa rencontre avec un plan, petits et grands cercles

L'intersection d'une sphère par un plan (imaginer un couteau qui tranche une orange) est un cercle. Si le plan contient le centre de la sphère, ce cercle est un grand cercle, sinon c'est un petit cercle. Il y a une infinité de grands et petits cercles, autant que de plans potentiels. *Figure 9*

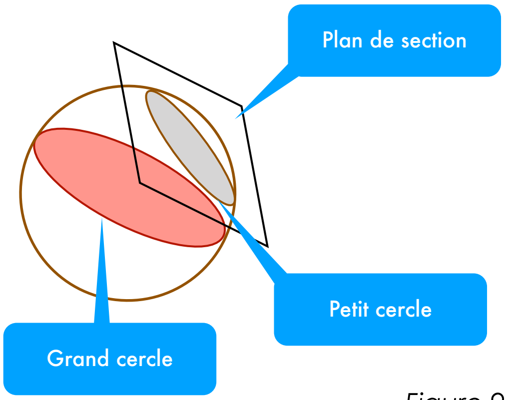


Figure 9

1.4.3 La sphère terrestre et ses particularités

On associe à la surface de la planète Terre, une sphère, son axe de rotation sur elle-même définit l'axe des pôles. Le plan perpendiculaire à cet axe et passant par le centre de la sphère est le plan équatorial. Son intersection avec la sphère fournit un grand cercle, **l'équateur**. *Figure 10*

L'intersection de la sphère avec des plans parallèles au plan équatorial fournit des **petits cercles**, les **parallèles**.

L'intersection de la sphère avec des plans contenant l'axe des pôles fournit des **grands cercles**, les **méridiens.**

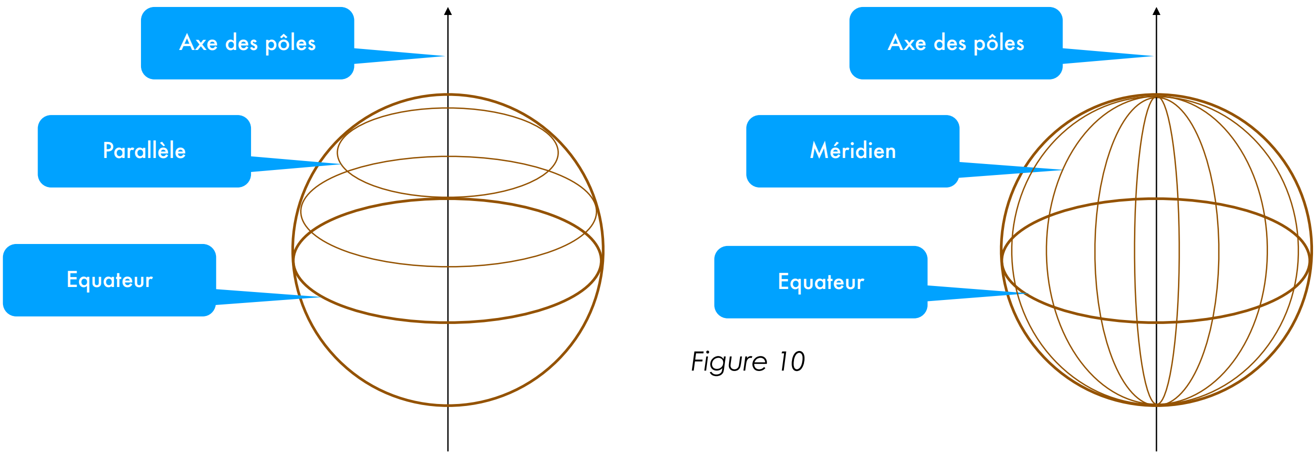


Figure 10

Le repérage à la surface de la terre se fait en utilisant méridiens et parallèles à l'aide de deux angles la **Latitude L** et la **Longitude G.** *Figure 11*

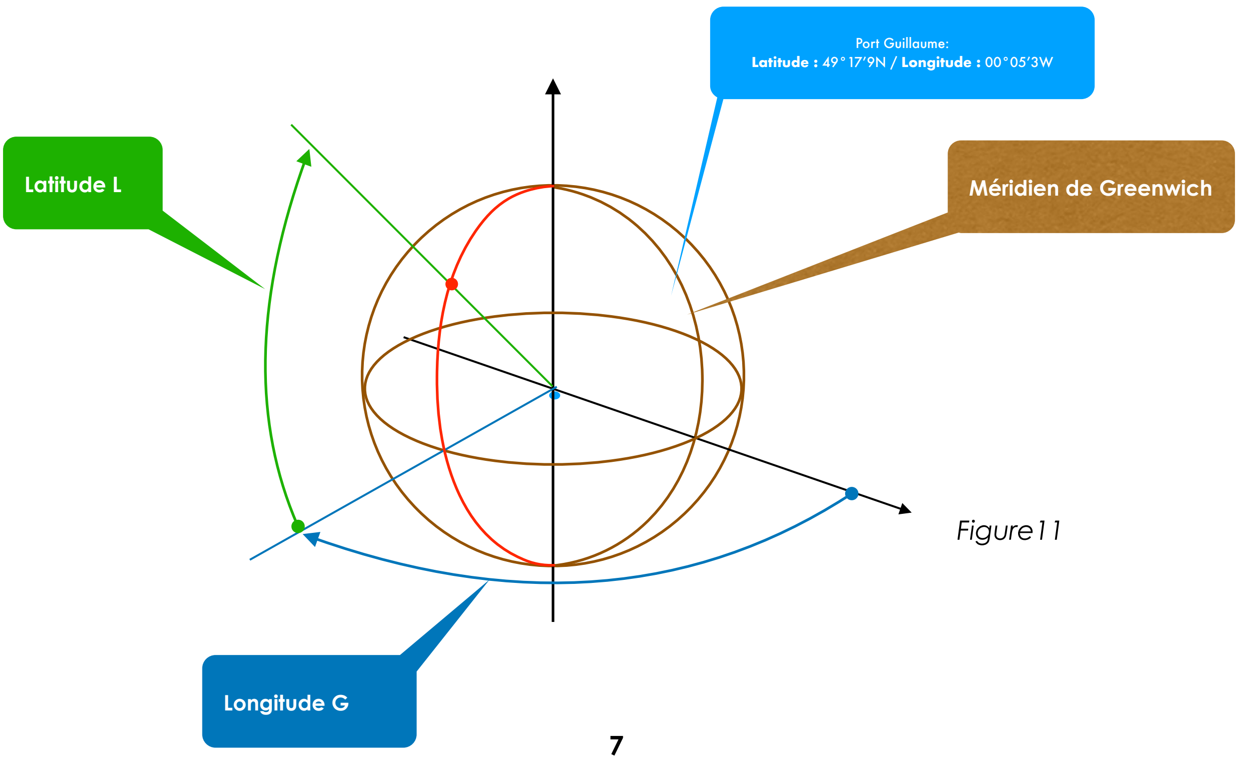


Figure11

La Latitude **L** donne la position angulaire du point considéré par rapport à l'équateur et est comptée de 0 à 90° vers le Nord ou vers le Sud. Le point considéré est donc sur un petit cercle (sauf s'il est à l'équateur ou sur un pôle).

La Longitude **G** est la position angulaire du méridien passant par le point considéré et comptée à partir d'un méridien arbitrairement choisi comme origine, le méridien de Greenwich. La longitude est comptée de 0 à180° vers l'ouest et de 0 à 180 ° vers l'Est.

Le mille nautique :

Selon la définition originelle, le mille marin est exactement égal à la longueur d'un arc reliant deux points d'un même méridien terrestre distants d'une minute en latitude.

Mais la Terre n'est pas une sphère parfaite car un peu aplatie aux pôles, qu'on modélise dans chaque système géodésique par un ellipsoïde de révolution aplati. La définition initiale du mille marin conduit à une variation de longueur d'approximativement un pour cent en fonction de la latitude, paradoxalement plus grande aux pôles (1 861,6 mètres) qu'à l'équateur (1 842,9 mètres). Les pays dans lesquels le mille marin était en usage ont adopté historiquement une valeur proche de celle applicable à la latitude de leur région géographique et donc légèrement différente d'un pays à l'autre.

Dans le système géodésique WGS-84 du GPS où les ellipses méridiennes ont une longueur voisine de 40 008 kilomètres, cette définition correspond à une longueur moyenne d'environ 1 852,2 mètres.

Dans le même système géodésique, le cercle équatorial a une longueur voisine de 40 075 kilomètres, soit une valeur moyenne d'environ 1 855,3 mètres pour une minute de longitude à l'équateur.

En 1929, la longueur du mille marin international a été fixée par convention à la valeur universelle et entière de 1 852 mètres, valeur à laquelle tous les pays se sont progressivement ralliés.

Si on admet une longueur de 40 000 km pour l'équateur, une minute d'arc sur celui-ci représente une longueur de : 40 000/360/60 = 1,85185 km.

1.4.4 Je vois un astre sous un angle donné, où suis-je?

C'est une situation que nous rencontrons lorsque nous observons un astre ou une étoile et qu'on peut relever sa hauteur angulaire au dessus de l'horizon. Ce qui se fera à l'aide d'un sextant.

Sur le schéma de la Figure 12 l'observateur situé au point M à la surface de la Terre voit l'astre A. L'horizon de l'observateur est un plan tangent à la sphère au point M. A l'aide de son sextant il peut mesurer l'angle β qui existe entre l'horizon local et la direction de l'astre MA. On constate géométriquement qu'un observateur situé en M', point symétrique de M par rapport à la droite OA, verrait l'astre sous le même angle. C'est le cas de tous les observateurs placés sur le petit cercle passant par M situé dans le plan perpendiculaire à OA.

La seule indication de l'angle β ne peut pas me positionner à la surface de la Terre, je sais simplement que je suis sur ce petit cercle.

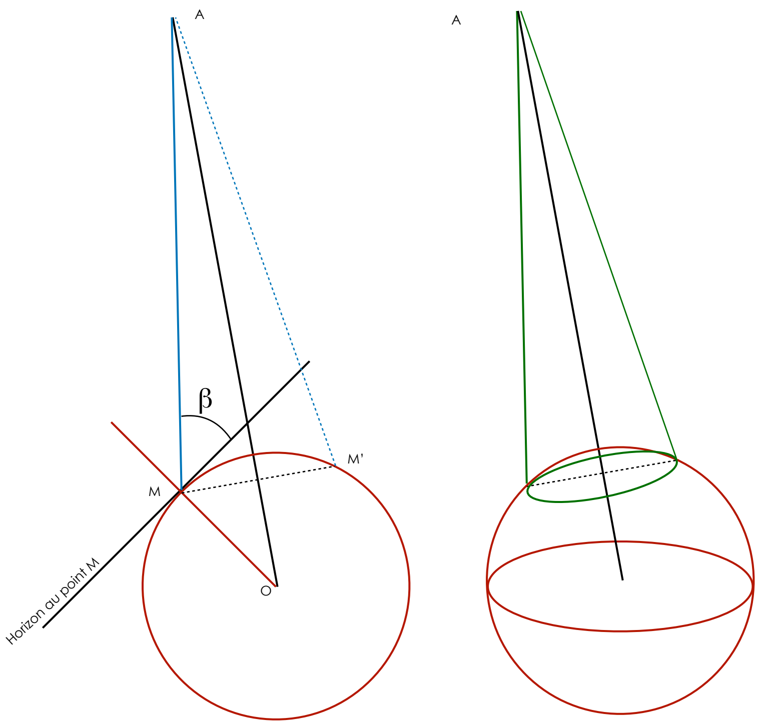


Figure 12

1.5 TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Nous avons abordé des notions de trigonométrie plane avec les fonctions sinus et cosinus. La trigonométrie sphérique s'intéresse à la transposition de ces notions sur une sphère. Et pour nous c'est tout autant la sphère terrestre que la sphère céleste.

1.5.1 Triangle sphérique

1 Prenons une sphère de centre O et trois points A, B et C situés sur cette sphère mais n'appartenant pas au même cercle (petit ou grand). *Figure 13*

2 Traçons les trois arcs de grand cercle passant par ces points. Nous formons ainsi une figure proche du triangle dont les trois cotés sont des arcs de cercle, on l'appelle un triangle sphérique. Les cotés « courbes » de ce triangle sont nommés a, b, c. A étant opposé à A, b à B et c à C.

3 On trace les segments de droite reliant chacun des points A, B, C au centre O de la sphère. Trois nouveaux angles sont maintenant définis:

- L'angle BOC qui sous-tend le coté a, noté α (alpha)
- L'angle AOC qui sous-tend le coté b, noté β (beta)
- L'angle AOB qui sous-tend le coté c, noté γ (gamma)

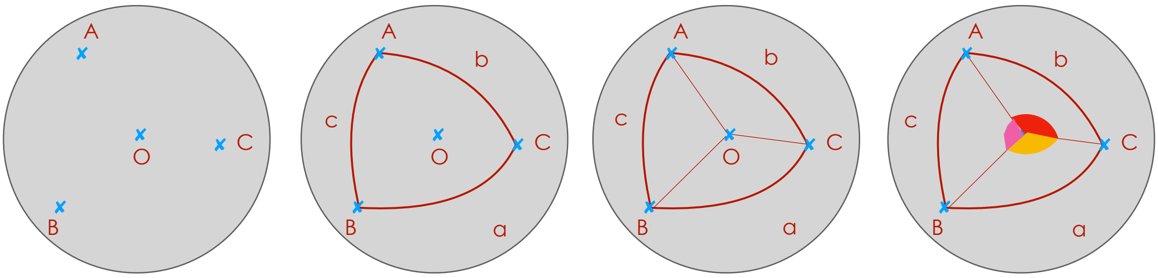


Figure 13

Sur un cercle la longueur d'un arc est proportionnelle à l'angle au centre. *Figure 14*

Ici la longueur de l'arc AB vaut : AB = R. α avec α exprimé en **radians** et **R le** rayon du cercle.

Remarque : c'est ainsi qu'on calcule le périmètre d'un cercle L = 2.π.R (l'angle au centre vaut 2. π)

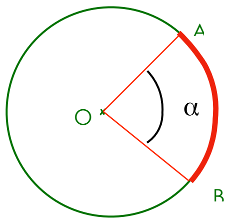


Figure 14

Sur notre sphère en la prenant de rayon 1, la longueur d'un de ses cotés courbes vaut donc:

- pour le coté AB, c = γ
- Pour le coté BC, a = α
- Pour le coté AC, b = β

On voit que l'on pourra parler indifféremment du coté du triangle ou de l'angle au centre qui le sous-tend, les deux étant égaux.

1.5.2 La formule des cosinus

Le mathématicien François Viète a déterminé en 1593 la relation fondamentale du triangle sphérique qui permet, connaissant 3 de ses éléments, d'en calculer un quatrième.

Cette formule, qui ne sera pas démontrée ici nous donne la relation :

$$\boxed{\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A}$$

A désigne l'angle au sommet du triangle sphérique en A.

Par permutation on obtient, par application de la même formule :

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\ \sin c.\ \cos B$$

$$\cos c = \cos a.\cos c + \sin a.\ \sin c.\ \cos C$$

Exploitations :

On connait la longueur de deux cotés, b et c, et l'angle A entre eux. On peut donc calculer la longueur du coté a en utilisant la fonction inverse arcos[1].

$$a = \arccos\ (\cos b \times \cos c + \sin b \times \sin c \times \cos A)$$

Connaissant la longueur des trois cotes a, b, c, on peut calculer la valeur d'un angle du triangle sphérique:

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\ \sin c.\ \cos B$$

$$\cos B = (\cos b - \cos a.\ \cos c) / \sin a.\ \sin c$$

$$B = \arccos\ ((\cos b - \cos a.\ \cos c) / \sin a.\ \sin c)$$

1.6 EXERÇONS-NOUS

Pour ces exercices il est bon de se munir d'une calculatrice scientifique ou d'une application sur smartphone et d'en acquérir la maitrise. Pour nos calculs de trigonométrie nous utiliserons les radians et les degrés; il faudra donc pouvoir passer d'une unité à l'autre au niveau des manipulations de la calculette.

1.6.1 Pour s'entrainer avec sa calculette

Calculer les quantités suivantes : cos (10°), sin (95°), cos (-10°), cos (5°), cos (10 rad), sin (5rad).

Déterminer, en radians et en degrés, les angles donnés par : arcos (O,8), arcos (0,5), arcsin (0,5) arcsin (1)

1.6.2 Calcul de l'orthodromie entre deux points sur la Terre.

L'orthodromie est la plus courte distance entre deux points. Elle est donc mesurée sur l'arc de grand cercle joignant ces deux points.

On utilise un triangle sphérique avec comme point A le pôle nord, comme points B et C les deux points à relier, par exemple :

B : Port Guillaume **Latitude :** 49°17'9''N **Longitude :** 00°05'3''W

C : Port de Brighton **Latitude :** 50° 49′ 42″ N, **Longitude :** 00° 08′ 22″ W

1 Sur le schéma Figure 15 identifier la positions des deux ports avec les points B et C et représenter leurs longitudes et latitudes.

2 tracer le triangle sphérique ABC.

3 représenter les arcs a, b et c

4 Déterminer b et c en fonction des latitudes connues

5 Déterminer l'angle A en fonction de longitudes

6 Par application de la formule des cosinus déterminer a en degrés

7 En déduire la distance orthodromique entre Port Guillaume et Brighton.

Vous pouvez vérifier vos calculs avec une application de géolocalisation !

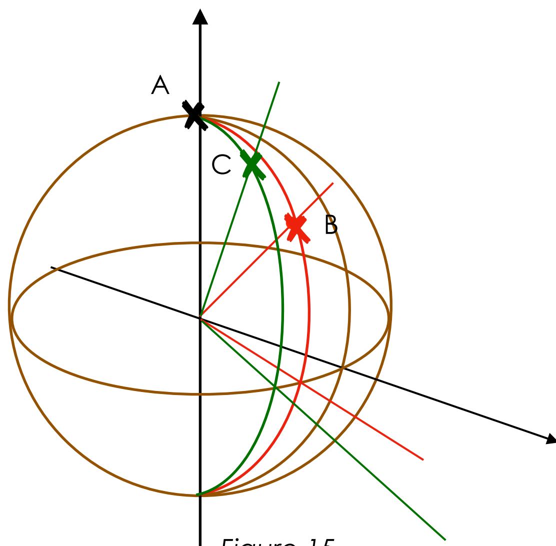


Figure 15

Solution :

1 Sur le schéma Figure 15 identifier la positions des deux ports avec les points B et C et représenter leurs longitudes et latitudes.

LB : latitude de B GB longitude de B. B : Port Guillaume

LC : latitude de C GC longitude de C. C : Brighton

---

[1] cette fonction renvoie l'angle dont le cosinus vaut la valeur entre les parenthèses. Elle est présente les calculatrices scientifiques.

2 tracer le triangle sphérique ABC.

3 représenter les arcs a, b et c

4 Déterminer b et c en fonction des latitudes connues

On constate que b = 90°-LB et c = 90°-LC, soit :

b= 90°- 49°17'9'' = 40°42'51''

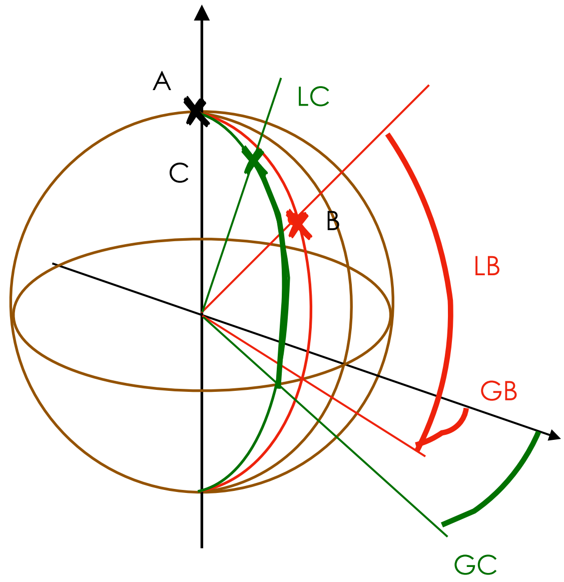
c = 90°-50° 49' 42" = 39°10'18''

5 Déterminer l'angle A en fonction de longitudes

Le plan tangent en A (pole Nord) est parallèle au plan équatorial, l'angle A est égal à la différence des longitudes.

A = GC-GB, soit A = 00°8'22'' - 00°5'3'' = 0°3'19''

6 Par application de la formule des cosinus déterminer a en degrés



cos a = cos b.cos c + sin b. sin c. cos A

Attention, les calculettes connaissent pas ou peu les degrés sexagésimaux, il faut donc exprimer tous les angles en degrés décimaux !

b= 40°42'51''= 40,714 °

c = 39°10'18''=39,1716 °

A = 0°3'19'' = 0,0552 °

cos a = cos (40,714 °).cos(39,1716 °)+sin (40,714 °). sin (39,1716 °) cos (0,0552 °)

Cos a = 0,999637488

a = 1,5428 °

Soit en minute d'angle : 1,5428 x 60 = 92,568 ''

La distance orthodromique entre Port Guillaume et Brighton est donc de ***92,568 milles nautiques.***

Le logiciel **Time zero d**onne environ 91 milles nautiques entre les deux ports. La différence s'explique par les arrondis de calcul faits. Les positions des deux ports données dans les hypothèses ne correspondent peut-être pas aux positions utilisées dans le logiciel.

Connaissant latitudes et longitudes de deux points du globe on peut calculer la distance selon orthodromie les séparant, ou en langage commun la distance « à vol d'oiseau », étant entendu qu'un oiseau se déplace bien sûr suivant l'orthodromie!

1.6.3 Allons de Calais au Cap Horn

Calculer la distance sur l'orthodromie entre ces deux points avec :

Calais : 50° 57' 4.64''N 1° 51' 31.27''E   Cap Horn : 55° 58′ 48″ sud, 67° 17′ 21″ ouest

Solution : a= 125,057 ° soit 7503,42 milles nautiques ou 13 896,33 km

Il faut faire attention aux définitions des différents angles et notamment prendre garde aux sens N, S des latitudes et E, W des longitudes.

Ce calcul de route ne tient pas compte des terres, il s'agit là encore de la distance « à vol d'oiseau » suivant un grand cercle.

Sur la carte marine la route orthodromique n'est pas représentée par une droite, aussi elle n'est pas une route à cap constant. Il est courant de la décomposer en segments pour obtenir sur chacun d'eux un cap constant, c'est ce que font les logiciels de navigation.

La route à cap constant est la route **loxodromique**, qui n'emprunte pas un arc de grand cercle, elle est nécessairement plus longue que la route orthodromique.

Cette différence n'est sensible que sur de grandes traversées, elle n'intervient pas (ou très peu) lors de nos navigations en Baie de Seine.

NAVIGATION ASTRONOMIQUE

RUDIMENTS DE TRIGONOMÉTRIE